MATIÈRE A OPTION

Mathématiques

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

L'utilisation des déterminants est déconseillée mais non interdite.

Les nombres utilisés sont tous réels.

On donne les matrices :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 2{,}01 & 3 & 5{,}99 & 1{,}98 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

I

1° Déterminer l'inverse de M_1 ; on précisera à quelle étape du calcul est établie la régularité de M_1. Les éléments de M_1^{-1} étant tous des entiers le calcul peut être conduit de manière à n'utiliser que des nombres entiers. D'autre part l'inverse étant utilisé dans les questions suivantes il est important d'éviter toute faute de calcul.

2° Calculer le carré de M_2. Peut-on en déduire que M_2 est inversible? Si oui peut-on expliciter l'inverse de M_2?

.../...

II

n est un entier au moins égal à 2 qui vaudra 4 dans les applications numériques. L est une matrice ligne à n éléments et C une matrice colonne à n éléments. On pourra poser $L = [l_1, l_2, \ldots, l_n]$ et $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Le produit CL est donc une matrice carrée d'ordre n et le produit LC une matrice à un seul élément auquel on peut l'identifier. On suppose L et C toutes deux non nulles.

1° Déterminer le rang de la matrice CL; quels sont ses vecteurs propres, les valeurs propres associées? En déduire les vecteurs et valeurs propres de I + CL, I étant la matrice unité d'ordre n.

A quelle condition sur le nombre LC, la matrice I + CL est-elle inversible?

2° Montrer que si la matrice I + CL est régulière on peut déterminer un réel k tel que I + kCL soit l'inverse de I + CL.

3° M étant une matrice régulière d'ordre n on considère N = M + CL. En écrivant N = M (I + M^{-1}CL), déterminer la condition nécessaire et suffisante sur le réel L M^{-1} C pour que N soit inversible et montrer que dans ce cas l'on a :

$$N^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{1 + LM^{-1}C} M^{-1}CLM^{-1} .$$

4° Montrer que la matrice $N_1 - M_1$ peut s'écrire comme produit d'une colonne C par une ligne L et qu'on peut choisir $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Prouver que N_1 est inversible et déterminer son inverse en utilisant les résultats du I.1° et du II.3°.

5° Déterminer par quel nombre il faut remplacer l'élément de la 2e ligne, 4e colonne de M_1 pour que la matrice obtenue ne soit plus régulière. Même question pour M_2.

Expliquer pourquoi et comment l'énoncé « toute matrice carrée est soit inversible soit non inversible » doit être nuancé lorsqu'on passe aux applications numériques.

III

Il s'agit, dans cette partie, d'obtenir des conditions suffisantes pour que l'inversion numérique d'une matrice se présente favorablement (comme pour M_2). Pour toute matrice A on note φ (A) la plus grande des valeurs absolues des éléments a_{ij} de A : $\varphi(A) = \operatorname{Sup}_{i,j} |a_{ij}|$.

1° A et B étant deux matrices de dimensions respectives (m, p) et (p, q) établir $\varphi(AB) \leqslant p\, \varphi(A) . \varphi(B)$ et montrer par un exemple que cette majoration de φ (AB) ne peut pas être améliorée pour A et B quelconques.

λ étant un réel évaluer $\varphi(\lambda A)$ en fonction de λ et de φ (A).

2° On reprend les notations du II. 3° : M matrice régulière d'ordre n ayant subi une petite modification de la forme C L est devenue N = M + C L.

Soit $\varepsilon = \varphi(L) . \varphi(C)$.

Montrer que si la condition

$$\varepsilon < \frac{1}{n^2\, \varphi(M^{-1})}$$

est vérifiée, la matrice N est inversible.

3° On se restreint désormais au cas où les modifications de M ne portent que sur une seule ligne de sorte que $n - 1$ éléments de C sont nuls et qu'on peut prendre le n^{eme} égal à 1. On aura ainsi :

$$\varphi(N - M) = \varphi(C L) = \varphi(L) = \varepsilon .$$

Établir l'inégalité $\varphi(M^{-1} C) \leqslant \varphi(M^{-1})$ et en déduire que si $\varepsilon < \frac{1}{n\, \varphi(M^{-1})}$, la matrice N est inversible.

Montrer, en remplaçant la première ligne de la matrice M_2 par 4 éléments nuls, que cette condition ne peut pas être améliorée pour une matrice M quelconque.

Supposant cette condition satisfaite donner une majoration de la valeur absolue des modifications subies par les éléments de l'inverse.

4° Appliquer les résultats obtenus à la question précédente aux 2 cas suivants :

a. $\varepsilon = 10^{-3}$ et M_2 pour matrice M ;

b. $\varepsilon = 10^{-3}$ et M_1 pour matrice M .

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail